MÉTHODE

Étudier la convexité d'une fonction

Données

$f(x) = (x+1)\,e^{-x}$

$f''(x) = e^{-x}(x-1)$ (obtenue dans une question précédente)

M — Étude de signe

① Étudier le signe de la $\underbrace{\text{dérivée seconde}}_{f''}$ de la fonction.

$f''(x) \geqslant 0$ $\quad$ f convexe

$e^{-x}(x-1) \geqslant 0$

$x - 1 \geqslant 0$ $\quad$ $\downarrow$ $e^{-x} > 0$

$x \geqslant 1$ $\quad$ $x \in [1\,;+\infty[$

En général, pas besoin de tableau de signes (perte de temps)

C — Convexité

② En déduire les intervalles sur lesquels la fonction est $\underbrace{\text{convexe}}_{f''>0}$ et $\underbrace{\text{concave}}_{f''<0}$.

Ainsi, sur $[1\,;+\infty[$, $f''(x) \geqslant 0$ donc f est convexe.

Et sur $\underbrace{]-\infty\,;1]}_{\text{"contraire" de } [1\,;+\infty[}$, $f''(x) \leqslant 0$ donc f est concave.

C — Point d'inflexion

③ Déterminer les coordonnées des éventuels points d'inflexion de la $\underbrace{\text{courbe de la fonction}}_{\mathcal{C}_f}$.

De plus : $f''(x) = 0$ $\quad$ Reprendre rapidement l'étape 1

$x = 1$ $\quad$ en remplaçant $\geqslant$ par $=$

Et : $f(1) = (1+1)e^{-1} = 2e^{-1}$. $\quad$ Ordonnée du point d'inflexion

Donc $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion, de coordonnées $(1\,;2e^{-1})$.

valeurs exactes dans la mesure du possible